



Università degli Studi di Palermo

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica per l'Informatica e la Comunicazione Scientifica

Fenomeni transitori in fisica

Candidato:
Rosaria Conti

Relatore:
Prof. Aurelio Agliolo Gallitto

Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione	ii
1 Fenomeni transitori in fisica	1
1.1 Moto in presenza di forze viscosse	1
1.1.1 Forza frenante proporzionale alla velocità	2
1.2 Riscaldamento o raffreddamento dei corpi	4
1.2.1 Conduzione	4
1.2.2 Convezione	5
1.2.3 Irraggiamento	6
1.3 Legge di Newton del raffreddamento	6
2 Apparato sperimentale	10
2.1 Apparato per lo studio della legge di Newton del raffreddamento	10
2.1.1 Interfaccia LabPro	11
2.1.2 Sensore di temperatura	12
2.2 Descrizione della procedura di misura e risultati ottenuti	13
3 Analisi e discussione dei risultati	15
3.1 Analisi dei dati sperimentali ottenuti	15
3.1.1 Grafici in scala semi-logaritmica	16
3.1.2 Analisi dei dati sperimentali ottenuti con i tre differenti contenitori	16
3.2 Discussione dei risultati	20
Ringraziamenti	24

Introduzione

Il lavoro di tesi riguarda uno studio sperimentale del raffreddamento di una quantità di acqua, che si trova inizialmente a temperatura maggiore della temperatura dell'ambiente. È noto che due corpi a contatto, scambiando calore, tendono a raggiungere una temperatura di equilibrio. Nonostante la variazione della temperatura degli oggetti a contatto dipenda da molti parametri fisici, la legge con cui essa cambia segue un andamento generale, analogamente a molti fenomeni transitori che avvengono in natura. Per studiare questo fenomeno e spiegare quindi il processo di raffreddamento con un modello matematico, sono state effettuate misure dell'andamento della temperatura in funzione del tempo di 140 ml di acqua contenuta in recipienti di differente materiale, al fine di comprendere anche quali sono i parametri che influenzano il tempo caratteristico di raffreddamento del nostro sistema.

L'elaborato è strutturato in tre capitoli. Nel primo capitolo è riportata una descrizione di due fenomeni transitori e precisamente il moto di oggetti in presenza di forze viscosse, come nel caso di corpi che si muovono in un liquido o in aria, e il riscaldamento o raffreddamento di corpi da una temperatura di equilibrio a un'altra.

Nel secondo capitolo è descritto l'apparato sperimentale con cui sono stati effettuati gli esperimenti, la procedura seguita nell'acquisizione dei dati e la loro presentazione con grafici.

Infine, nel terzo capitolo sono discussi i risultati degli esperimenti nel contesto del modello matematico che descrive l'andamento temporale della temperatura durante il raffreddamento, con il quale sono stati determinati i parametri che caratterizzano il sistema fisico in esame.

Capitolo 1

Fenomeni transitori in fisica

In natura è possibile osservare molti fenomeni transitori. Con il termine *transitorio* si intende il passaggio di un sistema da un regime stazionario a un altro. In questo capitolo, illustreremo brevemente le leggi che governano alcuni fenomeni fisici, caratterizzati da effetti transitori; in particolare, esamineremo più in dettaglio i seguenti casi.

- Moto di oggetti in presenza di forze viscosse, come nel caso di corpi che si muovono in un liquido o in aria.
- Riscaldamento o raffreddamento di corpi da una temperatura di equilibrio a un'altra.

1.1 Moto in presenza di forze viscosse

Quando un corpo è in moto su una superficie ruvida, o in un mezzo viscoso come l'aria o l'acqua, esso è soggetto a una forza, opposta al moto, dovuta alle interazioni tra il corpo e il mezzo che lo circonda. Tale forza prende il nome di *forza di attrito*. Il mezzo esercita una *forza frenante o viscosa*, \vec{R} , sul corpo che lo sta attraversando. \vec{R} è sempre opposta alla direzione di moto del corpo relativo al mezzo attraversato e la sua intensità può essere indipendente dalla velocità, come nel caso dell'attrito dinamico, oppure dipendere dalla velocità in modo complicato, come nel caso dell'attrito viscoso.

1.1.1 Forza frenante proporzionale alla velocità

Nella maggior parte dei casi si può assumere che la forza frenante, che agisce su un corpo in moto in un liquido o in un gas, sia proporzionale alla velocità relativa, \vec{v} , del corpo rispetto al mezzo in cui esso si muove [1, 2]; allora, la forza frenante è detta *forza di attrito viscoso* e può essere espressa come:

$$\vec{R} = -b\vec{v}, \quad (1.1)$$

dove b è una costante il cui valore dipende dalle proprietà del mezzo, dalla forma e dalle dimensioni del corpo in moto.

Il segno indica che \vec{R} ha verso opposto a \vec{v} .

Si consideri una sferetta di massa m lasciata cadere da ferma in un liquido viscoso. Si supponga inoltre, che le uniche forze che agiscono sulla sfera siano la forza frenante \vec{R} e la forza di gravità \vec{F}_g . Su un corpo immerso in un liquido agisce anche la *spinta di Archimede*, la cui intensità è costante ed è uguale al valore del peso del volume di liquido spostato. Per semplicità, in questa trattazione trascureremo la spinta di Archimede. Applicando la seconda legge di Newton, scegliendo come positiva la direzione verso il basso, si ottiene:

$$\sum F_y = mg - bv = ma = m \frac{dv}{dt}; \quad (1.2)$$

l'accelerazione della sferetta sarà anch'essa rivolta verso il basso.

L'eq. (1.2) è un'equazione differenziale lineare del I ordine in t , che può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt}v(t) + \frac{b}{m}v(t) - g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{g - (b/m)v} = dt. \quad (1.3)$$

Integrando l'eq. (1.3) tra $t = 0$ e t e tra $v = 0$ e v , otteniamo:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - bv/m} = \int_0^t dt, \quad (1.4)$$

$$-\frac{m}{b} \ln \left(g - \frac{bv}{m} \right) \Big|_0^v = t, \quad (1.5)$$

oppure

$$\ln \left(1 - \frac{bv}{mg} \right) = -\frac{b}{m}t. \quad (1.6)$$

La velocità della sfera tende al valore limite, v_L , quando l'accelerazione tende a zero, cioè quando l'intensità della forza frenante diventa uguale al peso della sfera. Il valore della

velocità limite si ottiene dall'eq. (1.2), ponendo $a = \frac{dv}{dt} = 0$, da cui si ottiene $mg - bv_L = 0$ e quindi $v_L = \frac{mg}{b}$.

Possiamo definire la *costante di tempo* $\tau = m/b$.

Sostituendo τ e la velocità limite v_L nell'eq. (1.6), si ottiene:

$$\ln \left(1 - \frac{v}{v_L} \right) = -\frac{t}{\tau}, \quad (1.7)$$

che può essere riscritta in forma esponenziale come

$$1 - \frac{v}{v_L} = e^{-t/\tau}, \quad (1.8)$$

da cui si ricava

$$v(t) = v_L(1 - e^{-t/\tau}). \quad (1.9)$$

L'andamento di $v(t)$ in funzione del tempo è riportato in figura 1.1.

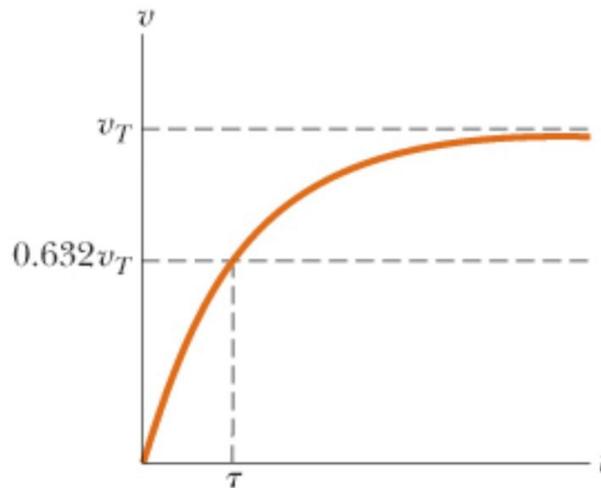


Figura 1.1: Andamento della velocità in funzione del tempo di un corpo che si muove in presenza di forze viscosse, sotto l'effetto della forza di gravità; v_T è la velocità limite. Immagine adattata da [1].

La costante τ corrisponde all'intervallo di tempo nel quale la sferetta, partendo da ferma, raggiunge il 63.2% del valore della sua velocità limite; cioè quando $t = \tau$, si ha $v = 0.632 v_L$.

1.2 Riscaldamento o raffreddamento dei corpi

In questo paragrafo, ci occuperemo di un altro fenomeno transitorio esistente in natura, cioè il riscaldamento o il raffreddamento dei corpi. Quando due oggetti a temperature diverse sono messi in contatto termico, l'energia si trasferisce come calore sempre dall'oggetto più caldo all'oggetto più freddo.

Lo scambio di calore tra due corpi a temperature differenti, o tra due parti di uno stesso corpo sempre a temperature differenti, può avvenire sostanzialmente in tre modi:

- conduzione;
- convezione;
- irraggiamento.

1.2.1 Conduzione

La *conduzione* del calore tra due corpi avviene quando gli stessi corpi sono messi in contatto diretto. Le molecole del corpo a temperatura maggiore, dotate di energia cinetica più alta essendo essa proporzionale alla temperatura, cedono parte della loro energia alle molecole del corpo più freddo, finché entrambi i corpi raggiungono la stessa temperatura di equilibrio termico. In altri termini, la conduzione avviene solo se c'è una differenza di temperatura tra i due oggetti a contatto, oppure tra due parti dello stesso corpo. Il trasferimento di calore per conduzione è caratterizzato dall'assenza di spostamenti di massa. La velocità con cui il calore fluisce dipende dalle proprietà della sostanza che si riscalda o si raffredda. I metalli sono buoni conduttori termici, mentre i materiali come amianto, sughero, carta, sono cattivi conduttori.

Si consideri una piastra conduttrice di spessore Δx e sezione A , come mostrato in figura 1.2. Una faccia della piastra è a temperatura T_1 e l'altra a temperatura $T_2 > T_1$. Si trova sperimentalmente che l'energia Q che fluisce in un tempo Δt dall'estremità più calda a quella più fredda è proporzionale alla sezione e al gradiente di temperatura [1, 3], cioè

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (1.10)$$

Per una lastra di spessore infinitesimo dx e una differenza di temperatura dT , possiamo scrivere la *legge della conduzione termica* come

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}, \quad (1.11)$$

dove il *flusso di calore*, H , rappresenta la rapidità con la quale il calore viene trasferito attraverso l'area A , la costante k è la *conducibilità termica* del materiale e $\frac{dT}{dx}$ è il *gradiente di temperatura*, nella sola direzione x che descrive la variazione della temperatura con la posizione [1, 3].

Scegliamo la direzione del flusso termico nella direzione in cui aumenta x ; poiché il calore fluisce nella direzione in cui diminuisce la temperatura, la presenza del segno meno nell'eq. (1.11) fa sì che H risulti positivo quando $\frac{dT}{dx}$ è negativo.

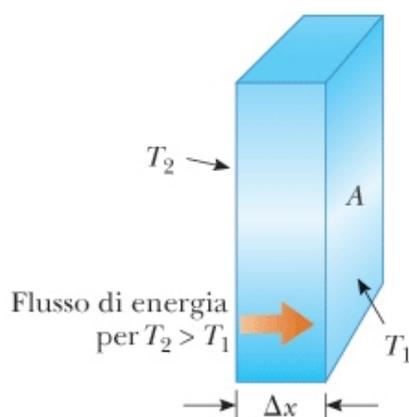


Figura 1.2: Piastra conduttrice di spessore Δx e sezione A con una faccia a temperatura T_1 e l'altra a temperatura $T_2 > T_1$. Immagine adattata da [1].

1.2.2 Convezione

La *convezione* è un processo termico tipico dei fluidi, liquidi o gas come aria o acqua. Quando un fluido entra in contatto con un corpo a temperatura elevata, nei punti più vicini al corpo avviene una diminuzione della densità del fluido che, grazie alla spinta di Archimede, mette in moto una parte di fluido stesso; il fluido sovrastante più freddo e quindi più denso scende, instaurando così un movimento convettivo. Tale movimento fa sì che il calore si sposti dal basso verso l'alto. Se un liquido viene riscaldato non dal

fondo del recipiente ma dall'alto, le correnti convettive sono assenti. Il trasferimento di energia dovuto al moto di una sostanza riscaldata è chiamato trasferimento di energia per convezione. Quando il moto è dovuto a differenze di densità come avviene per l'aria vicino a una fiamma, o al movimento dell'aria sulla spiaggia, si ha *convezione naturale*. Quando la sostanza riscaldata viene messa in moto da un ventilatore o da una pompa, come alcuni sistemi di riscaldamento ad aria calda o acqua calda, il processo è detto *convezione forzata*.

1.2.3 Irraggiamento

Un fenomeno molto particolare è il trasporto di energia per *irraggiamento*; esso non necessita di alcun mezzo per il trasferimento di energia, in quanto lo scambio di calore è dovuto alla propagazione di onde elettromagnetiche. Tutti i corpi irraggiano continuamente energia sotto forma di onde elettromagnetiche. Un esempio di irraggiamento che ci riguarda da vicino è lo scambio di calore tra Sole e Terra. La potenza (energia per unità di tempo) irraggiata da un corpo è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta. Questa legge, nota come *Legge di Stefan-Boltzman*, è espressa dall'equazione:

$$H = \sigma A \varepsilon T^4, \quad (1.12)$$

dove H è il flusso di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche irradiate dalla superficie del corpo, σ è una costante uguale a $5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, A è la superficie del corpo, ε è il *potere emissivo* e T è la temperatura assoluta della superficie del corpo. Il valore di ε può variare tra zero e uno a seconda delle proprietà della superficie del corpo. Se un corpo si trova a temperatura T e l'ambiente è a temperatura T_a , come risultato dell'irraggiamento l'energia netta assorbita, o ceduta, ogni secondo dal corpo è:

$$H_{netta} = \sigma A \varepsilon (T^4 - T_a^4). \quad (1.13)$$

1.3 Legge di Newton del raffreddamento

Sappiamo che due corpi a temperatura differente se posti in contatto termico si scambiano calore. L'osservazione sperimentale indica che essi si portano a una uguale temperatura T_f , detta temperatura di equilibrio. Tale osservazione si riassume nella legge che

permette di determinare la quantità di calore scambiato:

$$Q = m c_s (T_f - T_i) = m c_s \Delta T, \quad (1.14)$$

dove m indica la massa del corpo, T_i la temperatura iniziale e c_s il calore specifico.

Nello scambio ci sono almeno due corpi in contatto termico e il secondo per effetto della quantità di calore ricevuta (o perduta) varia anch'esso la sua temperatura, ma di una diversa quantità (perché è diversa la sua temperatura iniziale e può essere diversa la sua massa e/o il suo calore specifico). Infatti, detti 1 e 2 i due corpi, si ha:

$$m_1 c_1 |T_f - T_1| = m_2 c_2 |T_f - T_2|. \quad (1.15)$$

Il calore assorbito da un corpo è uguale al calore ceduto dall'altro corpo.

Si osserva sperimentalmente che lo scambio di calore tra corpi non avviene istantaneamente, ma sarà necessario un certo tempo, caratteristico del sistema, per raggiungere l'equilibrio termico. Quando un corpo è posto in un ambiente ¹ a temperatura più bassa, la *legge di Newton del raffreddamento* afferma che *la velocità di raffreddamento del corpo è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente*. Tale velocità, definita come la variazione di temperatura nell'unità di tempo, dipende dal tipo di contatto termico tra i corpi, dalla estensione della superficie di contatto e coinvolge, quasi sempre, tutti i meccanismi di trasferimento di calore sopra elencati [3, 4, 5]. La stessa cosa succede se si vuole riscaldare, oppure raffreddare, uniformemente un oggetto con riscaldamento o raffreddamento convettivo. Infatti, si osserva sperimentalmente che l'oggetto non raggiungerà istantaneamente la temperatura desiderata, ma in un certo intervallo di tempo caratteristico del sistema (oggetto e ambiente circostante).

Nel caso del raffreddamento, il calore trasferito dall'oggetto all'ambiente circostante nell'unità di tempo (flusso di calore) è proporzionale alla differenza di temperatura tra l'oggetto e l'ambiente:

$$H = \frac{dQ}{dt} = hA[T(t) - T_a], \quad (1.16)$$

dove h è il coefficiente di trasferimento termico, A è la superficie attraverso la quale avviene il passaggio di calore, $T(t)$ è la temperatura dell'oggetto al tempo t e T_a è la temperatura dell'ambiente.

¹L'ambiente può essere considerato come un corpo con capacità termica infinita.

Il segno positivo indica che il flusso H è positivo quando il calore lascia il corpo perché la sua temperatura è maggiore di quella dell'ambiente (H è un flusso uscente). Se il calore viene ceduto all'ambiente, ciò causa una diminuzione della temperatura del corpo data dalla seguente relazione:

$$H = -mc_s \frac{d}{dt} T(t), \quad (1.17)$$

dove m è la massa dell'oggetto e c_s il calore specifico.

Il segno negativo indica la diminuzione di temperatura quando il calore fluisce dal corpo verso l'esterno (cioè, quando $H > 0$). Uguagliando queste due equazioni per il passaggio di calore, otteniamo:

$$mc_s \frac{d}{dt} T(t) = -hA_s [T(t) - T_a]. \quad (1.18)$$

Questa è un'equazione differenziale lineare del I ordine in t , che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} T(t) + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_a}{\tau}, \quad (1.19)$$

dove abbiamo definito la costante di tempo τ come

$$\tau = \frac{mc_s}{hA}. \quad (1.20)$$

La costante di tempo τ indica che masse m grandi e calori specifici c_s elevati danno luogo a lenti cambiamenti della temperatura, mentre grandi superfici A e grandi coefficienti di trasferimento termico h danno luogo a rapidi cambiamenti della temperatura.

Considerando T_a costante e sostituendo $\Delta T(t) \equiv T(t) - T_a$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \Delta T(t) + \frac{1}{\tau} \Delta T(t) = 0. \quad (1.21)$$

Quando un sistema raffreddandosi soddisfa l'equazione di sopra, si dice che soddisfa la legge di Newton del raffreddamento. La soluzione di questa equazione per la differenza tra la temperatura del sistema e quella dell'ambiente circostante ΔT in funzione del tempo è la seguente:

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.22)$$

dove ΔT_0 è la differenza di temperatura iniziale, al tempo $t = 0$.

In altre parole, l'oggetto raggiunge la stessa temperatura dell'ambiente con un andamento esponenziale determinato dalla costante termica di tempo τ .

È importante notare che l'eq. (1.21) è simile all'eq. (1.3). Entrambi i fenomeni, sebbene riguardanti grandezze differenti, sono descritti dallo stesso modello matematico.

Capitolo 2

Apparato sperimentale

L'obiettivo di questo esperimento è lo studio dell'andamento temporale della temperatura di un oggetto che si raffredda e descrivere tale processo con un modello matematico.

2.1 Apparato per lo studio della legge di Newton del raffreddamento

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da un computer, una interfaccia sensore-computer, un sensore di temperatura e un fornello elettrico. Il sistema, invece, è costituito da 140 ml di acqua contenuti in recipienti cilindrici di differenti materiali, mostrati in figura 2.1.

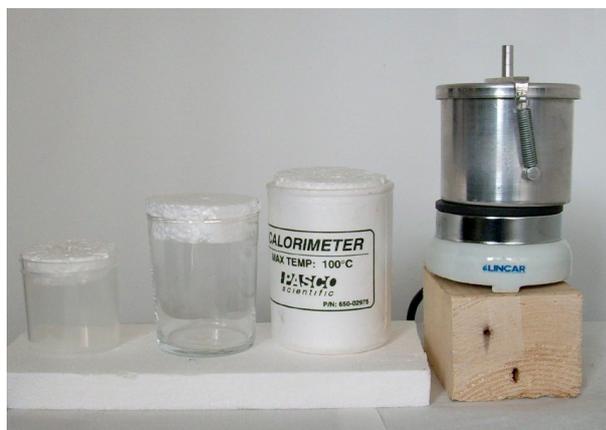


Figura 2.1: Contenitori cilindrici di differenti materiali: plastica, vetro, polistirolo; nella foto è mostrato anche il fornello elettrico utilizzato per il riscaldamento dell'acqua.

2.1.1 Interfaccia LabPro

L'interfaccia LabPro della Vernier [7] può comunicare con il computer in ambiente Windows mediante porta USB, gestita dal software LoggerPro; essa consente di collegare il sensore di temperatura al computer per l'acquisizione automatica dei dati sperimentali. L'interfaccia può campionare ad alta frequenza (fino a 50.000 letture al secondo), oppure a bassissima frequenza (un campionamento al giorno) con un'elevata sensibilità (convertitore Analogico/Digitale a 12 bit). L'interfaccia è mostrata in figura 2.2. I dati sono stati



Figura 2.2: Interfaccia Vernier LabPro usata per l'acquisizione automatica dei valori di temperatura rilevati dal sensore di temperatura. Immagine adattata da [7].

acquisiti con il programma LoggerPro [7]; questo è un software realizzato dalla Vernier per gestire l'acquisizione dei dati dall'interfaccia LabPro e per l'analisi dei dati sperimentali raccolti. Si presenta con una interfaccia utente semplice e intuitiva e permette di eseguire

agevolmente molte operazioni cliccando sulla specifica icona nella barra dei comandi. La schermata principale di LoggerPro si presenta come mostrato in figura 2.3.

I dati sperimentali sono stati analizzati con il software Origin [8]. Il programma permette, oltre a rappresentare in grafico i dati, di effettuare le operazioni di adattamento di curve ai dati sperimentali (fitting dei dati).

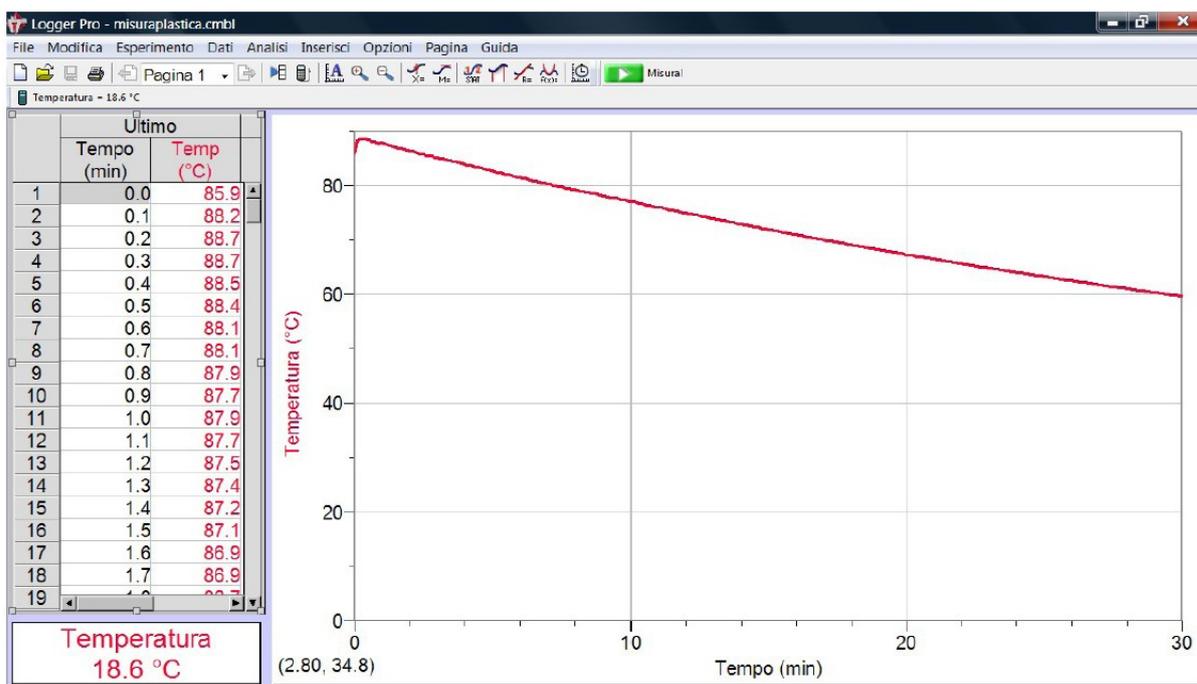


Figura 2.3: Schermata principale del programma d'acquisizione LoggerPro della Vernier.

2.1.2 Sensore di temperatura

In figura 2.4 è mostrato il sensore di temperatura usato durante gli esperimenti. Esistono diverse tipologie di sensori di temperatura. Il sensore di temperatura della Vernier usa un termistore NTC (Negative Temperature Coefficient). Le caratteristiche del sensore sono le seguenti. La risoluzione a 12 bit del convertitore Analogico/Digitale dell'interfaccia LabPro consente di avere un errore di sensibilità nella misura della temperatura di circa 0.1°C nell'intervallo di temperatura investigato (da 40°C a 100°C) e un errore di precisione di circa 0.5°C alla temperatura di circa 100°C . Altre caratteristiche del sensore sono:

- Tempo di risposta: 10 s (acqua in agitazione);

- Intervallo di temperatura di lavoro: da -40°C a 135°C ;
- Massima temperatura che il sensore può tollerare senza subire danni: 150°C .



Figura 2.4: Sensore di temperatura. Immagine adattata da [7].

2.2 Descrizione della procedura di misura e risultati ottenuti

L'esperimento consiste nel misurare la temperatura di una certa quantità di acqua, durante il suo raffreddamento, dalla temperatura di circa 90°C fino alla temperatura di circa 60°C . L'acqua è inizialmente riscaldata mediante un fornello elettrico; in seguito viene inserito il sensore di temperatura nel contenitore, dopo esser stato isolato sia superiormente che inferiormente, mediante due spesse lastre di polistirolo; quindi, viene avviata l'acquisizione dei dati. I valori di temperatura sono letti automaticamente dal programma di acquisizione LoggerPro, il quale è stato impostato per effettuare 10 campionamenti al minuto. La misurazione è effettuata per circa 30 minuti, in modo tale da poter osservare un'apprezzabile variazione della temperatura in funzione del tempo.

Le misure sono state effettuate con 140 ml di acqua contenuta in tre differenti recipienti, rispettivamente, plastica, vetro e polistirolo. In figura 2.5 è mostrata la disposizione del sensore di temperatura nel recipiente, contenente 140 ml di acqua, per l'acquisizione dei dati. I risultati sperimentali ottenuti sono riportati in figura 2.6.



Figura 2.5: Disposizione del sensore di temperatura nel recipiente per la rilevazione della temperatura dell'acqua.

Come si può vedere dal grafico di figura 2.6, l'acqua posta nei differenti contenitori si raffredda in tempi diversi a seconda del contenitore. Nel capitolo seguente, analizzeremo e discuteremo i dati sperimentali ottenuti.

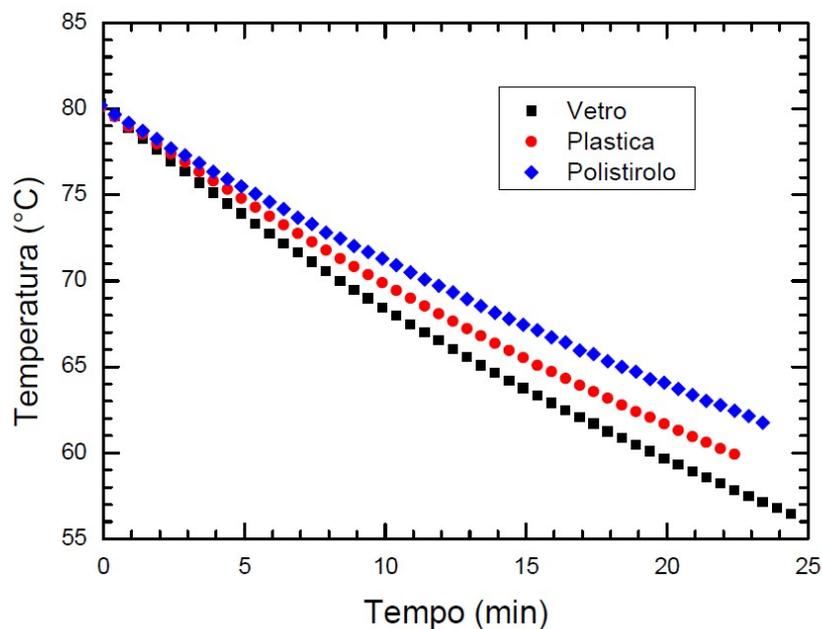


Figura 2.6: Grafico della temperatura dell'acqua in funzione del tempo (contenitore in plastica, vetro, polistirolo). L'errore associato alle misure è inferiore alle dimensioni dei simboli.

Capitolo 3

Analisi e discussione dei risultati

L'andamento temporale della temperatura di un liquido che si raffredda in un ambiente a temperatura inferiore è un esponenziale decrescente. Tale andamento è tipico di tutti i fenomeni che implicano il raggiungimento di uno stato di equilibrio (o di uno stato stazionario) da parte di un sistema; andamenti dello stesso tipo si possono riscontrare in sistemi meccanici o elettrici come il moto di corpi in caduta libera in un mezzo viscoso, la scarica di un condensatore, lo svuotamento di un recipiente di liquido attraverso un tubo sottile, ecc.

3.1 Analisi dei dati sperimentali ottenuti

Nel Capitolo 1, abbiamo analizzato la Legge di Newton del raffreddamento, deducendo che la differenza tra la temperatura di un sistema e quella dell'ambiente circostante ΔT in funzione del tempo è data dalla seguente espressione:

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-t/\tau}, \quad (3.1)$$

dove ΔT_0 è la differenza di temperatura iniziale, al tempo $t = 0$, τ è un tempo caratteristico del sistema.

La temperatura dell'oggetto assume lo stesso valore della temperatura dell'ambiente seguendo un andamento esponenziale, caratterizzato dalla costante termica di tempo τ .

L'analisi dei dati sperimentali ottenuti negli esperimenti sarà effettuata allo scopo di determinare la costante τ per il raffreddamento della stessa quantità di acqua nei tre contenitori di differente materiale.

3.1.1 Grafici in scala semi-logaritmica

Per ricavare il parametro τ è conveniente l'uso di una scala logaritmica per l'asse delle ordinate, cioè è conveniente riportare in grafico il logaritmo della grandezza in funzione del tempo. Ciò offre i vantaggi seguenti. L'andamento della temperatura rispetto al tempo è esponenziale del tipo

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau}, \quad (3.2)$$

dove y_0 e τ sono numeri reali.

Calcolando il logaritmo di ambo i membri dell'eq. (3.2) e prendendo $Y = \ln y$ e $Y_0 = \ln y_0$, otteniamo

$$Y(t) = \ln (y_0 e^{-t/\tau}) = Y_0 - \frac{1}{\tau}t. \quad (3.3)$$

L'andamento esponenziale diventa in questo modo lineare e dal coefficiente angolare della retta così ottenuta si può facilmente ricavare il parametro dell'andamento esponenziale, cioè il tempo τ caratteristico del sistema.

L'uso della scala semi-logaritmica è vantaggiosa anche quando si vuole visualizzare grandi variazioni della grandezza in esame, in quanto una rappresentazione con ordinata lineare ridurrebbe praticamente a zero i valori piccoli, mentre usando un'ordinata logaritmica possiamo apprezzare le variazioni su più ordini di grandezza.

3.1.2 Analisi dei dati sperimentali ottenuti con i tre differenti contenitori

Per linearizzare l'andamento esponenziale della temperatura in funzione del tempo dobbiamo innanzitutto sottrarre a $T(t)$ il valore della temperatura dell'ambiente $T_a = 20^\circ\text{C}$, ottenendo $Y(t) = T(t) - T_a$; calcolare quindi $\ln(T - T_a)$. Con il software Origin [8], riportiamo in grafico in scala semi-logaritmica i dati sperimentali, come mostrato in figura 3.1.

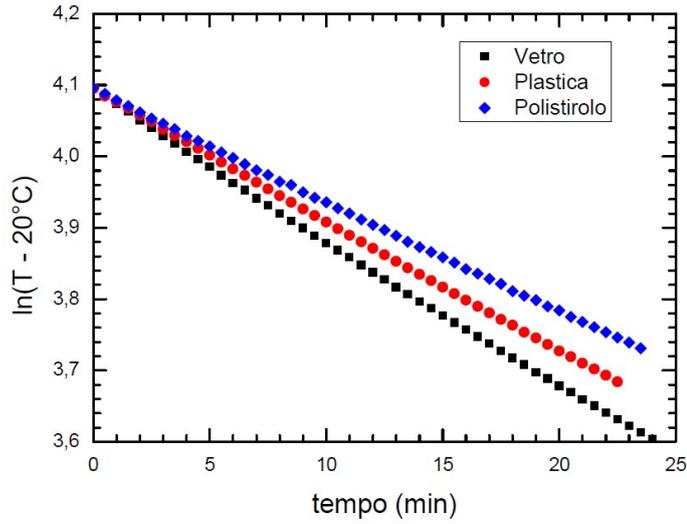


Figura 3.1: Grafico di $\ln(T - 20^\circ\text{C})$ in funzione del tempo per il contenitore in plastica, vetro e polistirolo.

Per individuare la retta che si adatta meglio ai punti sperimentali, tracciamo le *rette di massima e minima pendenza* [9]

$$y = m_{max}x + q_{max}, \quad (3.4)$$

$$y = m_{min}x + q_{min}. \quad (3.5)$$

La retta che meglio si adatta ai dati sperimentali sarà data da $y = mx + q$, con

$$m = \frac{m_{max} + m_{min}}{2} \quad \text{e} \quad q = \frac{q_{max} + q_{min}}{2}. \quad (3.6)$$

Il parametro cercato τ è uguale all'inverso di m , cioè $\tau = 1/m$.

Per stimare l'errore da associare alla misura di m , si può prendere, semplicemente, il cosiddetto *errore assoluto massimo*, δm definito nel seguente modo¹:

$$\delta m = \frac{m_{max} - m_{min}}{2}. \quad (3.7)$$

Nel nostro caso, per determinare il parametro $\tau \pm \delta\tau$ è necessario calcolare prima $m \pm \delta m$ ed $\varepsilon m = \frac{\delta m}{|m|}$, da cui ricavare rispettivamente $\varepsilon\tau$ e $\delta\tau$.

I risultati sono riportati nelle figure 3.2, 3.3, 3.4, ottenuti utilizzando, rispettivamente, un contenitore in plastica, in vetro e in polistirolo.

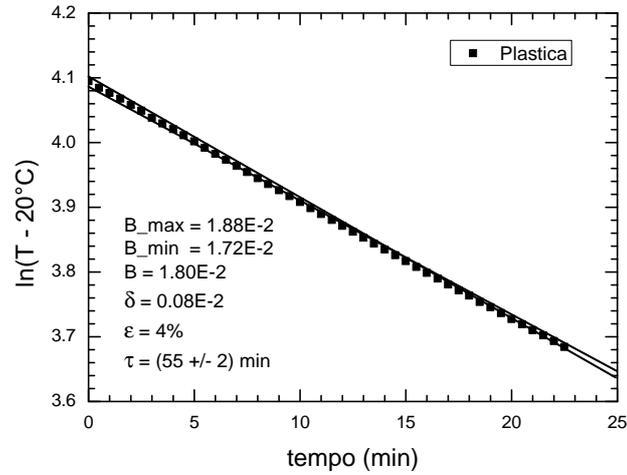


Figura 3.2: $\ln(T - 20^\circ\text{C})$ in funzione del tempo. I punti sono i dati sperimentali ottenuti con il contenitore in plastica; le linee sono le rette di massima e minima pendenza; B_{max} e B_{min} indicano le rispettive pendenze. Nel grafico sono riportati i valori dei parametri, con i relativi errori.

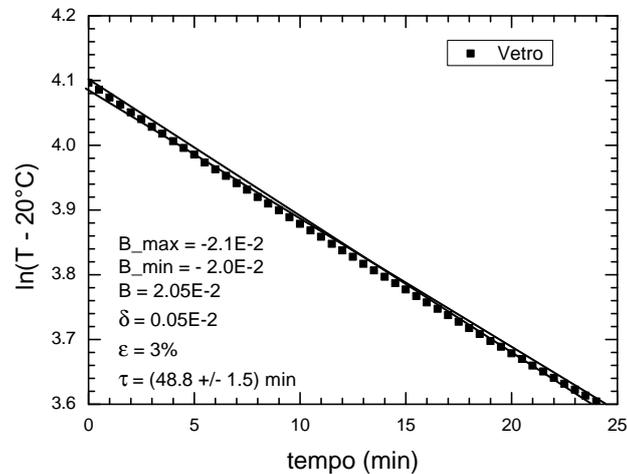


Figura 3.3: $\ln(T - 20^\circ\text{C})$ in funzione del tempo. I punti sono i dati sperimentali ottenuti con il contenitore in vetro; le linee sono le rette di massima e minima pendenza. Nel grafico sono riportati i valori dei parametri, con i relativi errori.

¹L'errore assoluto è definito come $\delta x = |x - X|$, dove X è il valore "vero" della grandezza x e δx è lo scarto tra il valore misurato x e il valor vero X ; l'errore relativo ϵx è definito come $\epsilon x = \frac{\delta x}{|x|}$.

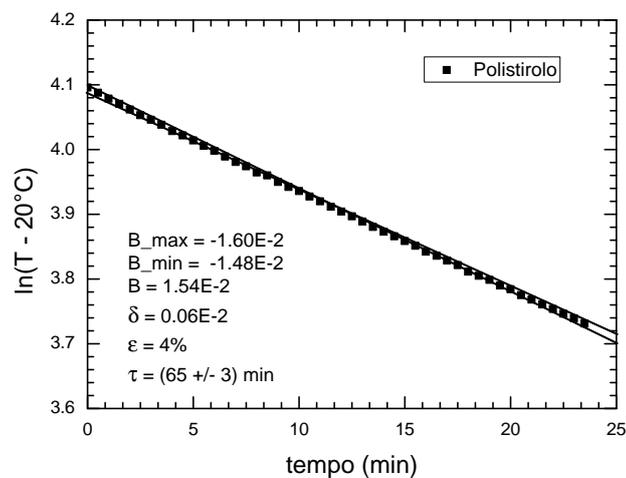


Figura 3.4: $\ln(T - 20^\circ\text{C})$ in funzione del tempo. I punti sono i dati sperimentali ottenuti con il contenitore in polistirolo; le linee sono le rette di massima e minima pendenza. Nel grafico sono riportati i valori dei parametri, con i relativi errori.

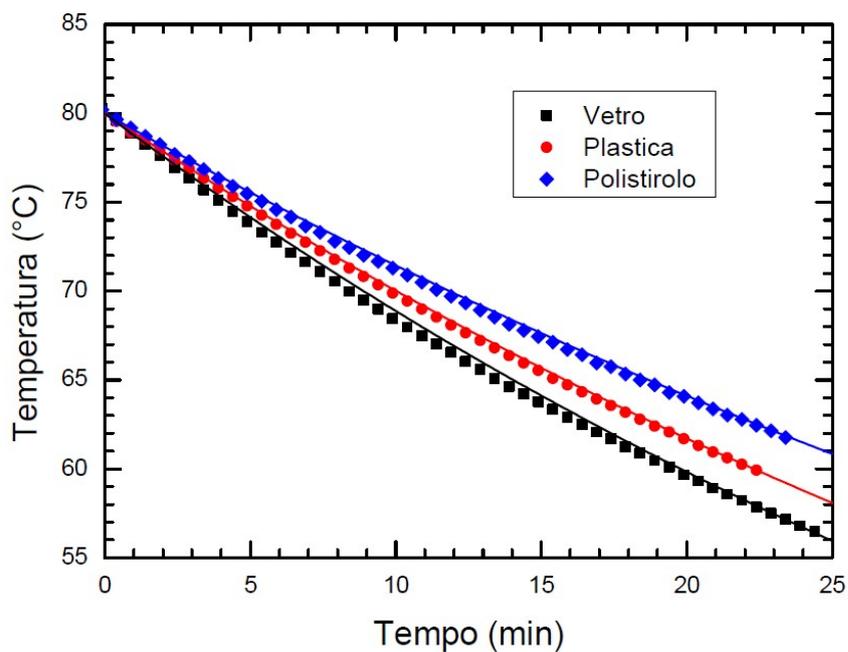


Figura 3.5: Grafico della temperatura in funzione del tempo per il contenitore in plastica, vetro e polistirolo. Le linee sono le curve ottenute dall'eq. (3.1) usando i valori di τ ottenuti dall'analisi dei dati sperimentali.

In figura 3.5 sono mostrate le curve sperimentali e quelle teoriche usando i valori di τ ottenuti dal fitting dei dati sperimentali. Come si può vedere dai grafici, l'accordo è abbastanza buono.

3.2 Discussione dei risultati

Dai valori di $m \pm \delta m$ ricaviamo $\tau = 1/m$ e $\delta\tau = \tau \times \varepsilon\tau = \tau \times \varepsilon m$, in quanto gli errori relativi di m e di τ sono uguali: $\varepsilon\tau = \varepsilon m$. Avendo determinato il parametro τ , proseguiamo la nostra analisi calcolando il coefficiente di trasferimento termico h , che è legato a τ dalla seguente equazione

$$\tau = \frac{mc_s}{hA}. \quad (3.8)$$

Come si vede, per determinare h è necessario conoscere le superfici attraverso cui si propaga il calore. Nel nostro caso, i contenitori sono stati poggiati su uno spesso strato di polistirolo espanso e contemporaneamente i contenitori sono stati tappati con dei tappi sempre di polistirolo espanso. In queste condizioni, possiamo ragionevolmente assumere che il calore fluisce solamente attraverso la superficie laterale del contenitore e possiamo trascurare quindi la trasmissione di calore attraverso le superfici di base. Pertanto, riportiamo in tabella 3.1 le superfici laterali dei tre contenitori usati negli esperimenti.

Gli errori nei valori di τ sono stati trovati con il metodo della retta di massima e minima pendenza. Gli errori in h sono stati trovati facendo propagare l'errore dei vari fattori nell'eq.(3.8), considerando l'errore in τ e quello in A indipendenti[10]. Inoltre, abbiamo trascurato l'errore nella massa di acqua e nel calore specifico dell'acqua e quindi

Materiale	Diametro (mm)	Altezza (mm)	Superficie laterale (cm ²)
Vetro	69 ± 1	39 ± 1	84 ± 4
Plastica	65 ± 1	44 ± 1	90 ± 3
Polistirolo	80 ± 2	31 ± 1	78 ± 5

Tabella 3.1: Diametri e aree laterali dei tre contenitori usati negli esperimenti.

Materiale	τ (min)	h (W m ⁻² °C ⁻¹)
Vetro	48.8 ± 1.5	24.0 ± 1.3
Plastica	55 ± 2	19.8 ± 1.1
Polistirolo	65 ± 3	19.3 ± 1.5

Tabella 3.2: Valori dei parametri ottenuti dall'analisi dei dati sperimentali.

l'errore relativo εh risulta

$$\varepsilon h = \sqrt{(\varepsilon\tau)^2 + (\varepsilon A)^2}. \quad (3.9)$$

In tabella 3.2, sono riportati i valori di τ e di h ottenuti per i tre casi.

I risultati ottenuti mostrano che il materiale del contenitore influenza sia il tempo di raffreddamento sia il coefficiente di trasmissione termica. Come era prevedibile, l'acqua nel contenitore di polistirolo si raffredda più lentamente, mentre nel contenitore di vetro si raffredda più velocemente. Tuttavia, i valori ottenuti non sono molto diversi (sono dello stesso ordine di grandezza). Ciò è dovuto principalmente alla capacità dell'ambiente di sottrarre calore al nostro sistema con moti convettivi dell'aria presente nell'ambiente, che assorbe il calore ceduto dall'acqua. Complessivamente, questo è il processo di scambio termico che richiede il tempo maggiore e quindi i risultati non possono essere molto diversi nei vari casi, in quanto in tutti e tre i casi, i moti convettivi sono pressochè uguali.

Facciamo notare, infine, che l'andamento esponenziale è verificato fintanto che la differenza di temperatura tra liquido che si raffredda e ambiente esterno non è molto grande. In caso contrario, l'andamento della temperatura nelle fasi iniziali del raffreddamento è più rapido rispetto a quello prevedibile con un esponenziale. Nel caso di raffreddamento di un liquido, si osserva sperimentalmente che questa differenza di temperatura non deve essere superiore a circa 30 – 40°C.

Conclusioni

Il lavoro di tesi ha riguardato lo studio sperimentale del raffreddamento di 140 ml di acqua che si trova inizialmente a una temperatura maggiore della temperatura dell'ambiente. Sono stati misurati i tempi di raffreddamento dell'acqua contenuta in tre recipienti rispettivamente di vetro, plastica (polipropilene) e polistirolo espanso. In ciascun caso, è stata misurata la temperatura per circa 30 minuti a partire dalla temperatura iniziale dell'acqua di 80°C. I risultati ottenuti sono stati analizzati allo scopo di individuare i parametri che influenzano il raffreddamento del sistema. Il processo di raffreddamento segue una legge esponenziale che prende il nome di *legge di Newton del raffreddamento*. Per determinare i parametri termici caratteristici del sistema, abbiamo linearizzato i dati sperimentali che descrivono come varia la temperatura in funzione del tempo e abbiamo cercato, per mezzo di una procedura di adattamento, la curva che meglio si adatta ai dati sperimentali. Quindi, per ogni set di dati abbiamo determinato la pendenza della retta ottenuta dalla linearizzazione dei dati sperimentali, da cui abbiamo successivamente stimato il tempo caratteristico di raffreddamento τ e il coefficiente di trasmissione termica h . I risultati ottenuti mostrano che il materiale del contenitore influenza sia il tempo di raffreddamento sia il coefficiente di trasmissione termica. Come era prevedibile, l'acqua nel contenitore di polistirolo si raffredda più lentamente, mentre nel contenitore di vetro si raffredda più velocemente. Tuttavia, i valori ottenuti non sono molto diversi in quanto sono principalmente legati alla velocità di trasporto del calore dell'aria dell'ambiente per mezzo di moti convettivi.

Bibliografia

- [1] R.A. Serway, J.W. Jewett, *Fisica per scienze ed ingegneria*, Edises IV Edn. (2009)
- [2] G.B. Benedek, F.M.H. Villars, *Physics with Illustrative Examples from Medicine and Biology, Mechanics*, Springer II Edn. (2000)
- [3] R. Resnick, D. Halliday, *Fisica 1*, CEA
- [4] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, Ltd (2004)
- [5] D.A. Desai, *Physics Education*, **23** (2006) pag. 51
- [6] it.wikipedia.org
- [7] www.vernier.com
- [8] www.originlab.com
- [9] E. Fiordilino, A. Agliolo Gallitto, *Il laboratorio di fisica nel progetto lauree scientifiche*, Aracne (2010)
- [10] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli II Edn. (2000)

Ringraziamenti

Si ringrazia il Dipartimento di Fisica (DiFi) e il Laboratorio Didattico per la Fisica (LaDiF) della Facoltà di Scienze MM. FF. NN. per avere messo a disposizione la strumentazione, con cui sono stati effettuati gli esperimenti.